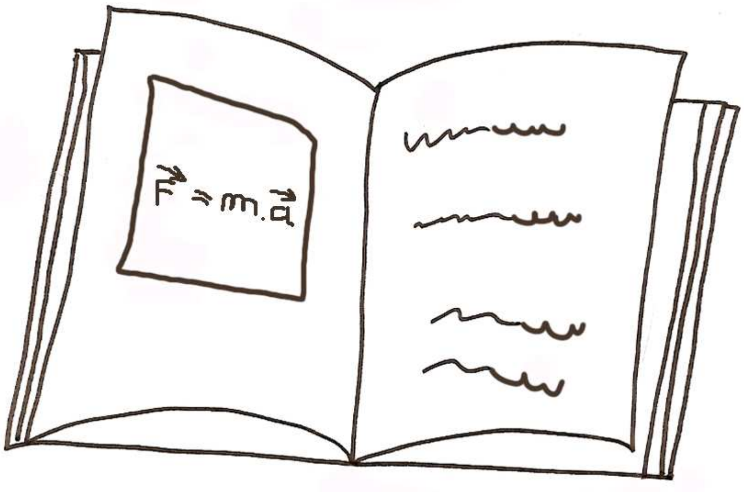
Département STPI
$1^{ère}$ année
1^{er} semestre
UF2

PHYSIQUE DU POINT MATERIEL

TRAVAUX DIRIGÉS

Année 2014-2015

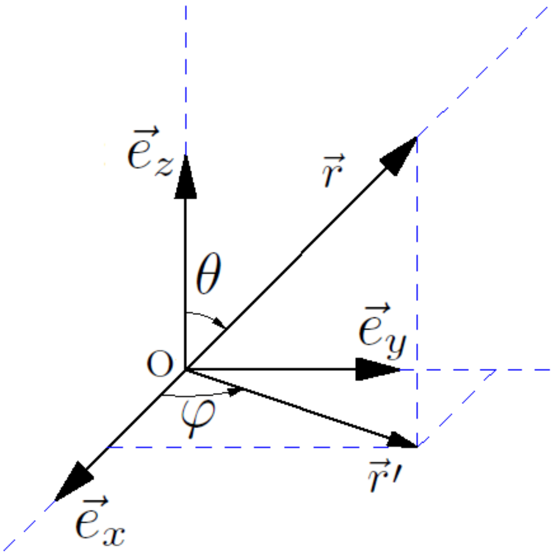


Plus d'exercices... ? Pourquoi ne pas consulter des livres spécialisés à la Bib'INSA ?

Dernière mise à jour : 1er septembre 2014

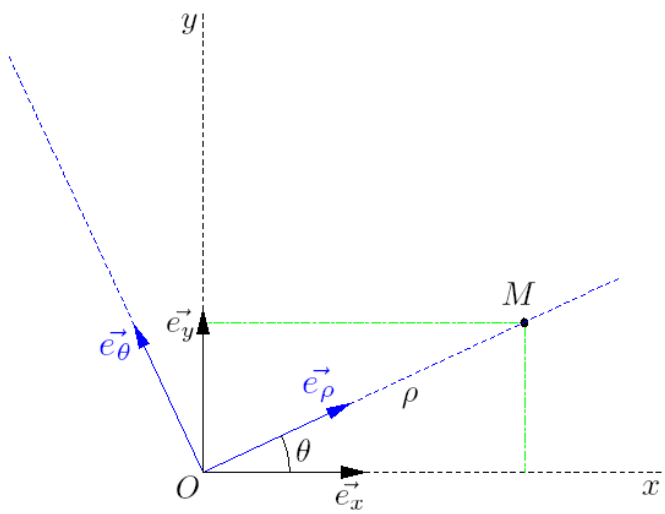
Exercice 1

On considère un espace à trois dimensions muni d'un repère d'espace cartésien $\{O, \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z\}$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est unitaire et sa direction est définie par les angles θ et φ (voir schéma). Le vecteur $\vec{r}$ est colinéaire à $\vec{e}_r$. Le vecteur $\vec{r}\,' = r'.\vec{e}_r\,'$ est la projection de $\vec{r}$ dans le plan (xOy).



1. Exprimez le vecteur $\vec{r}$ selon les vecteurs de base $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r\,'$ en fonction de r, et θ.
2. Exprimez le vecteur $\vec{r}$ selon les vecteurs de base $\{\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z\}$ en fonction de r, θ et φ.
3. Calculez le produit scalaire $\vec{e}_x.\vec{e}_r\,'$ en utilisant une méthode géométrique. Retrouver ce résultat en utilisant les composantes des deux vecteurs impliqués.
4. On donne $\theta = \pi/4$ et $\varphi = \pi/3$. Quel est l'angle γ, en degrés, entre les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_r$?
5. Calculez les produits vectoriels suivants : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$; $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$; $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$; $\vec{e}_x \wedge \vec{r}\,'$ et $\vec{r} \wedge \vec{r}\,'$.
6. Nous considérons que l'angle φ est désormais fonction du temps avec $\varphi = 2.t + 1$. L'angle θ et la quantité r restent constantes. Calculez l'expression $\frac{d\vec{e}_r\,'}{dt}$ de manière analytique, c'est à dire en explicitant les coordonnées des vecteurs dans la base cartésienne. Retrouvez ce résultat en calculant ce produit vectoriel grâce à la méthode géométrique.
7. Soit le vecteur $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}.\vec{e}_z$. Calculez le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{e}_r\,'$. Commentaires ?
8. Calculez l'expression $\frac{d\vec{r}}{dt}$ avec la méthode de votre choix
9. Soit le vecteur $\vec{v} = 3.f_{(t)}.\vec{e}_x + 5.g_{(t)}.t.\vec{e}_y - \frac{k}{f_{(t)}}.\vec{e}_z$. Calculer la forme différentielle de $\vec{v}$ (c'est à dire $d\vec{v}$) ainsi que sa dérivée par rapport au temps $\frac{d\vec{v}}{dt}$, avec $g_{(t)} = 2.t$; $f_{(t)} = 3.t$ et $k = -2$.

Exercice 2 - La spirale



Un point M décrit dans le plan (xOy) une spirale d'équations paramétriques :

$$x = b.\theta.\cos\theta \quad \text{et} \quad y = b.\theta.\sin\theta$$
$$\left(\text{avec } b = C^{te}\,;\ \theta = \{\widehat{O_x, OM}\} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = C^{te}\right)$$

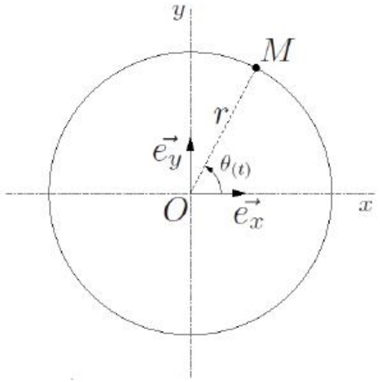
A l'origine du temps $t = 0$, nous avons $\theta = 0$.

1. Déterminer l'expression formelle de (i) le vecteur position $\vec{OM}$, (ii) le vecteur vitesse $\vec{v}$ et (iii) le vecteur accélération $\vec{a}$ dans le repère polaire $\{O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}\}$
2. Calculer l'expression formelle du module du vecteur vitesse.
3. Montrer que les vecteurs unitaires parallèle $\vec{e_T}$ et normal $\vec{e_N}$ à la trajectoire sont donnés par :

$$\vec{e_T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}.\vec{e_\rho} + \frac{\omega t}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}.\vec{e_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{e_N} = \frac{-\omega t}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}.\vec{e_\rho} + \frac{1}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}.\vec{e_\theta}$$

4. Calculer l'expression formelle du vecteur accélération $\vec{a}$ dans le repère $\{\vec{e_T}\ ,\ \vec{e_N}\}$ (e.g. trouver a_T et a_N sachant que $\vec{a} = a_T.\vec{e_T} + a_N.\vec{e_N}$)
5. Trouver une méthode alternative pour déterminer a_T et a_N sans connaître au préalable les expressions de $\vec{e_T}$ et $\vec{e_N}$?
6. Etablir, en utilisant deux méthodes différentes, l'expression du rayon de courbure R de la trajectoire à n'importe quel temps t.

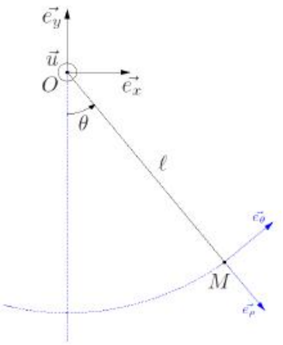
Exercice 3 - La lune



Nous nous intéressons au mouvement de la lune (M) autour de la terre (O) et considérons que sa trajectoire est circulaire dans un référentiel galiléen. Le centre de l'orbite lunaire est la terre et la distance terre-lune $r = ||\vec{OM}||$ est constante et vaut 384 400 Km. La position de la lune est repérée sur son orbite grâce à l'angle $\theta_{(t)}$ entre l'axe $[Ox)$ et le vecteur $\vec{OM}$ (voir schéma). La masse de la terre et de la lune sont 6×10^{24} kg et 7.3×10^{22} kg respectivement. La constante universelle de gravitation vaut $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$. Dans cet exercice, nous ne faisons aucune hypothèse sur la fonction $\theta_{(t)}$.

1. Etablir l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$, en fonction de r et $\theta_{(t)}$.
2. Dériver le vecteur position $\vec{OM}$ par rapport au temps et établir l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$, en fonction de r, $\theta_{(t)}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.
3. Etablir l'expression formelle du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$, en fonction de r, $\theta_{(t)}$, $\frac{d\theta_{(t)}}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.
4. En utilisant la Relation Fondamentale de la Dynamique, établir le système d'équations différentielles du mouvement.
5. Montrer que la vitesse angulaire de la lune autour de la terre est constante et donner sa valeur en $rd.s^{-1}$. Quelle est la fréquence de rotation en Hz ? Quelle est la vitesse de la lune dans le référentiel terrestre en $m.s^{-1}$?
6. Répondre aux questions 1, 2, 3, 4 & 5 en utilisant directement le repère polaire $\{O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}\}$.

Exercice 4 - Le pendule



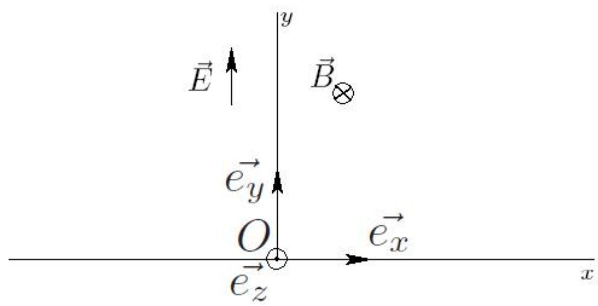
Un point matériel M est suspendu à un fil de longueur ℓ sans masse. La position de M est définie par l'angle θ. $\vec{u}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement (voir figure). On écarte M de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis on le laisse évoluer librement. L'origine du temps est telle que à $t = 0$, $\theta = 0$ et $v = v_0$

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

2. Résoudre cette équation dans le cas des petites oscillations.

Exercice 5 - Mouvement de particule chargée

On considère un référentiel galiléen $\Re$, muni du repère $\{O, \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}\}$, dans lequel une particule chargée de charge q et de masse m évolue dans un champ électrique $\vec{E} = E.\vec{e_y}$ et un champ magnétique $\vec{B} = -B.\vec{e_z}$ statiques et uniformes. A l'instant initial, la particule est située à l'origine du repère $\{O, \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}\}$ et sa vitesse est nulle. On rappelle que l'expression de la force subie par une particule placée dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par : $\vec{F} = q.\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$ (on négligera le poids dans cet exercice).

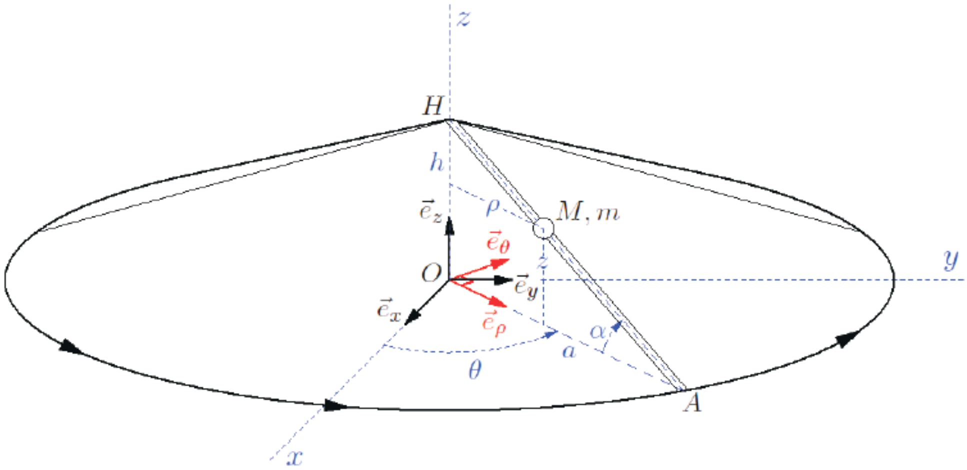


1. Exprimez les composantes F_x, F_y, F_z de la force subie par la particule à un instant t quelconque en fonction de E, B, q et des composantes de la vitesse v_x et v_y.
2. Montrez que le mouvement de la particule est inscrit dans le plan (xOy).
3. En écrivant la Relation Fondamentale de la Dynamique, déterminez les équations différentielles du mouvement.

4. On pose $\gamma = qB/m$. Trouvez, en résolvant complètement les équations différentielles du mouvement (c'est à dire en tenant compte des conditions initiales), les équations horaires $x_{(t)}$ et $y_{(t)}$ de la particule.
5. En déduire la forme de la trajectoire. Représentez schématiquement son allure.

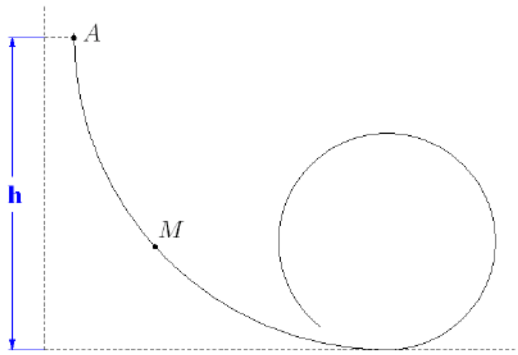
Exercice 6 - Le cône

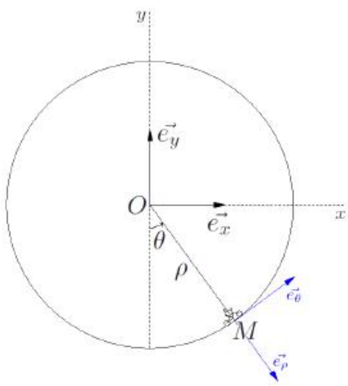
On considère un cône, de base b et de hauteur h, sur lequel une bille de masse m se déplace sans frottement selon un guide rectiligne partant du sommet à la base du cône (voir schéma). On note α ($\alpha \in [0, \pi/2[$) l'angle formé entre les segments $[AO]$ et $[AH]$. Le cône est en rotation avec une vitesse angulaire constante positive ($\dot{\theta} = \omega = +C^{te}$). On considère un référentiel fixe $\Re$ galiléen muni d'un repère cartésien $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ et un référentiel relatif $\Re'$ lié au cone et auquel est associé un repère cylindrique $\{O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$. La force de réaction du support est perpendiculaire au guide et peut être divisée en deux composantes : une composante normale, notée $\vec{N}$ dans le plan (ρOz) et une autre, $\vec{F}$, dans le plan (xOy).



1. Donnez l'expression du vecteur "vitesse relative" $\vec{v}_{M/\Re'}$ exprimé selon les vecteurs de base du repère cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.
2. Donnez l'expression du vecteur "accélération relative" $\vec{a}_{M/\Re'}$ exprimé selon les vecteurs de base du repère cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.
3. Donnez l'expression de l'accélération d'entrainement $\vec{a}_{\Re'/\Re}$ exprimé selon les vecteurs de base du repère cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.
4. Donnez l'expression de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$ exprimé selon les vecteurs de base du repère cylindrique $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$.
5. Ecrivez la RFD dans $\Re'$ et projetez l'expression ainsi obtenue selon les vecteurs de base du repère cylindrique pour obtenir un système d'équations différentielles.
6. On se place dans le cas $\alpha = 0$. A l'instant $t = 0$, alors que $\theta = 0$, la bille est lâchée sans vitesse initiale dans le référentiel $\Re'$ à la coordonnée $\rho = \rho_0$. Résolvez complètement le système d'équations de la question précédente (en tenant compte des conditions initiales) et donnez l'expression complète du vecteur position $\vec{OM}_{(t)}$ en fonction du temps.
7. On donne : $\omega = 0.5\ s^{-1}$; $m = 1\ Kg$ et $\rho_0 = 2\ m$. Donnez la valeur numérique de la force F à l'instant $t = 2s$ (sans oublier de préciser l'unité !) [on donne e=2.72 et 1/e=0.36].

Exercice 7 - Le skate-boarder



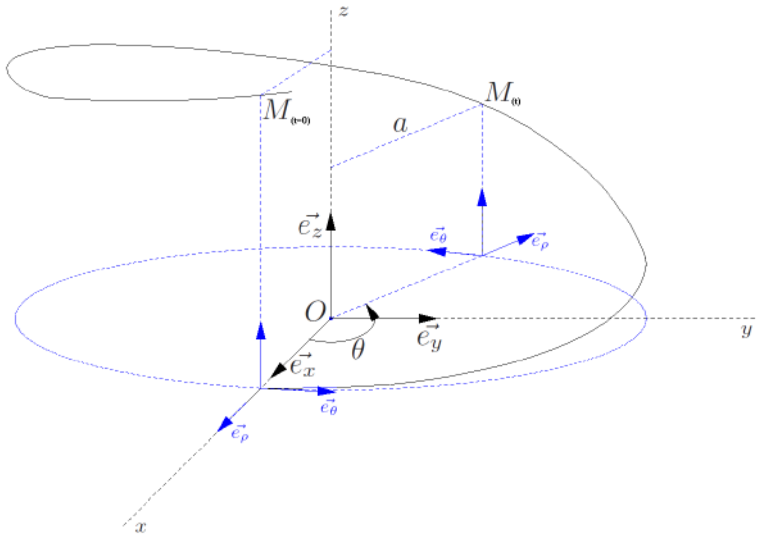


Un skate-boarder "de l'extrême" souhaite réaliser une performance exceptionnelle : il envisage de s'élancer sans vitesse initiale depuis le haut d'une rampe à l'altitude h, de se laisser glisser, puis de terminer sa course par une grande boucle (un looping) de rayon fixe ρ. Plus l'altitude h est petite, plus la performance sera remarquable ! Cependant le skate-boarder "de l'extrême" n'est pas fou : il souhaite calculer au préalable l'altitude h minimum pour être certain de ne pas "décrocher" une fois dans le looping...

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au mouvement du skate-boarder, assimilé un point matériel M de masse m, évoluant à l'intérieur d'une sphère de rayon ρ. Le mouvement se fait sans frottement. Le référentiel d'étude, dans lequel la rampe et le looping sont fixes, est supposé galiléen et sera noté $\Re$.

1. Etablir l'expression de l'accélération, exprimée selon les vecteurs de base $\{\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}\}$.
2. Montrer que le module de l'accélération tangentielle $||a_\theta||$ peut se mettre sous la forme $||a_\theta|| = \frac{||\vec{v}||}{\rho}\frac{d||\vec{v}||}{d\theta}$
3. Lister et étudier le(s) force(s) appliqué(es) sur le skate-boarder.
4. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique. Que devient cette équation en la projetant sur les vecteurs de base $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$?
5. Déterminer la vitesse v en un point quelconque de la trajectoire si v_0 est la vitesse en bas de la trajectoire
6. Quelle est la réaction normale $\vec{N}$ de la sphère sur le skate-boarder ?
7. Finalement... quelle est l'altitude minimum h à partir de laquelle le skate-boarder peut s'élancer sur la rampe sans vitesse initiale, pour que ce dernier adhère à la sphère tout au long de sa trajectoire ?

Exercice 8 - Le toboggan



Les équations en coordonnées polaires d'une trajectoire hélicoïdale d'axe vertical $[Oz)$ sont :

$$\begin{aligned} \rho &= a \\ z &= h.\theta \end{aligned}$$

Un enfant s'élance sans vitesse initiale d'une altitude $H = 2\pi h$ et glisse le long d'un toboggan hélicoïdal. Nous assimilons cet enfant à une particule matérielle mobile glissant sans frottement le long de l'hélicoïde.

1. Grâce au théorème de l'énergie cinétique, donnez l'équation horaire de la variable $\theta(t)$.

2. Calculez le temps que met l'enfant pour atteindre le plan horizontal de base ($z = 0$).

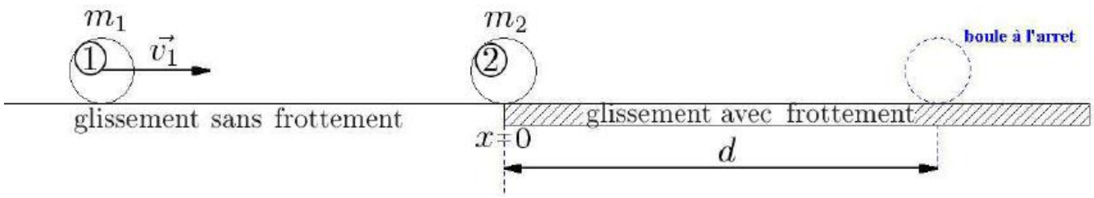
Exercice 9 - Vitesse de libération

L'accélération de la pesanteur varie en fonction de l'altitude par rapport à la surface de la terre suivant la loi : $\vec{g} = \frac{-GM_{terre}}{(R_{terre}+r)^2}.\vec{e_r}$ où G est la constante universelle de gravitation, M_{terre} et R_{terre} sont respectivement la masse et le rayon de la Terre. On appelle "vitesse de libération $v_{lib}(r)$ à l'altitude r la vitesse minimale que doit avoir une particule pour échapper à l'attraction terrestre (et donc s'éloigner jusqu'à l'infini). On donne : $G = 6.67\times10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$; $M_{terre} = 6\times10^{24}\ kg$; $M_{lune} = 7.3\times10^{22}\ kg$; $R_{terre} = 6400\ km$; $R_{lune} = 1700\ km$.

1. Montrer que la force de gravitation dérive d'une énergie potentielle U que l'on calculera (on prendra $U = 0$ à l'infini).
2. En déduire le travail minimal qu'il faut fournir pour élever une masse m à l'altitude r'.
3. Etablir l'expression de $v_{lib(r=0)}$, quelle est sa valeur numérique au sol et à une altitude h de 300 km ?
4. Quelle est la vitesse de libération à la surface de la Lune ?

Exercice 10 - Choc 1D

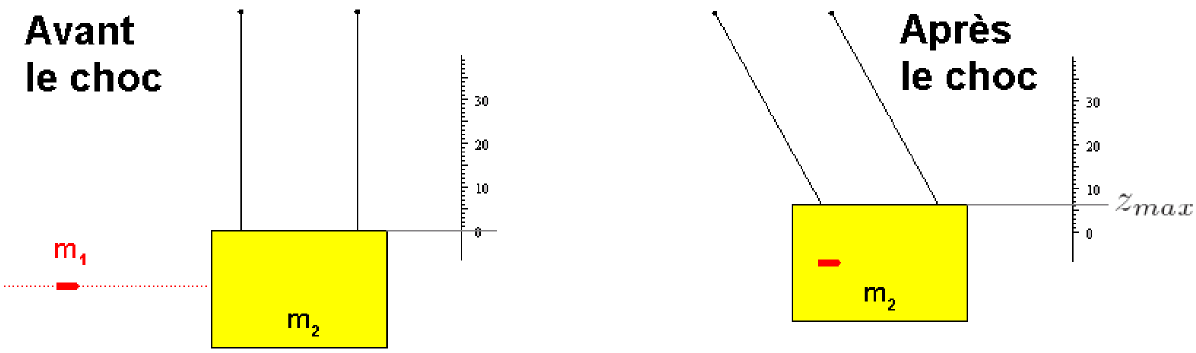
Une boule massive notée ①, de masse m_1 et assimilée à un point matériel, glisse sans frottement le long d'un axe [Ox), avec une vitesse constante $\vec{v_1} = v_1.\vec{e}_x$. Elle entre en collision avec une autre boule notée ②, de masse m_2 et assimilée elle aussi à un point matériel, alors que cette dernière est immobile au point O de coordonnée $x = 0$. Après le choc, la boule ② évolue sur un support "spécial" de sorte qu'elle est soumise à une force de frottement solide $\vec{f} = -f_c.||\vec{N}||.\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ (on rappelle que f_c est le coefficient de frottement solide cinétique). Finalement, la boule ② s'immobilise à une distance $d = 20cm$ du point O. On donne $v_1 = 3m.s^{-1}$, $m_1 = 200g$, $m_2 = 100g$, $f_c = 4$ et $g = 10m.s^{-2}$. On note $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs "vitesse initiale" des boules ① et ② tandis que les notations $\vec{v'}_1$ et $\vec{v'}_2$ seront utilisées pour désigner les vecteurs "vitesse" après le choc à $t = 0$.



1. Etablir un bilan des forces agissant sur la boule ②, en précisant pour chacune d'entre elles la direction, le sens et la norme.
2. Etablir l'équation horaire de la boule ② (en d'autres termes, trouver la fonction $x_{(t)}$). En déduire la vitesse $\vec{v'}_2$ juste après l'impact.
3. Le choc est-il élastique ?
4. La boule ① va-t-elle s'immobiliser, continuer sa course dans le même sens, ou bien repartir en arrière après le choc ? Justifiez votre réponse

---

Exercice 11 - Ballistique



Un projectile de masse m_1 = 20g est envoyé à la vitesse $v_1 = 1080km.h^{-1}$ contre un bloc de métal de masse m_2 =2.98kg suspendu à des fils sans masse. Après le choc, le solide s'élève à une hauteur z_{max}. On prend g = 10 m.s^{-2}

1. On suppose que le choc entre le projectile et le solide est élastique. Exprimer dans ce cas z_{max} en fonction de v_1, m_1 et m_2 puis effectuez l'application numérique.
2. On suppose que le choc entre le projectile et le solide est inélastique. Exprimer dans ce cas z_{max} en fonction de v_1, m_1 et m_2 puis effectuez l'application numérique.
3. Existe-t-il une différence entre les hauteurs z_{max} calculée dans l'un ou l'autre des cas ? Si oui, comment l'expliquer ?

Réponse aux exercices

Attention : il ne s'agit pas d'une correction, mais simplement de quelques réponses aux exercices pour vous aider à vérifier vos résultats. Lorsqu'une question ne demande pas de calcul ou de démonstration, la réponse n'est pas donnée.

Exercice 1

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : ...
Question 4 : $\gamma = \approx 69.3^o$
Question 5 : $||\vec{r}.\vec{r}^{\,'}|| = r.r'.\cos\theta$
Question 6 : $\frac{d\vec{e}_r^{\,'}}{dt} = -2.\sin\varphi.\vec{e_x} + 2.\cos\varphi.\vec{e_y}$
Question 7 : ...
Question 8 : ...
Question 9 : $\frac{d\vec{v}}{dt} = 9\vec{e}_x + 20t\vec{e}_y - \frac{2}{3.t^2}\vec{e}_z$

Exercice 2

Question 1 : ...
Question 2 : $||\vec{v}|| = b\omega\sqrt{1+\omega^2t^2}$
Question 3 : ...
Question 4 : $\frac{b.\omega^3.t}{\sqrt{1+\omega^2.t^2}}.\vec{e}_T + \frac{b.\omega^2.\left(2+\omega^2.t^2\right)}{\sqrt{1+\omega^2.t^2}}.\vec{e}_N$
Question 5 : ...
Question 6 : $R = \frac{b\left(1+\omega^2.t^2\right)^{3/2}}{(2+\omega^2.t^2)}$

Exercice 3

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : ...
Question 4 : $\omega = 2.65 \times 10^{-6}\ rd.s^{-1}$
Question 5 : ...

Exercice 4

Question 1 : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$
Question 2 : ...

Exercice 5

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : $-q.\dot{y}.B = m.\ddot{x}$ et $qE + q.\dot{x}.B = m.\ddot{y}$
Question 4 : $x_{(t)} = \frac{qE}{m\gamma^2}\left(\sin\gamma.t - \gamma.t\right)$ et $y_{(t)} = \frac{qE}{m\gamma^2}\left(1 - \cos\gamma.t\right)$
Question 5 : ...

Exercice 6

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : $\vec{a}_{(\Re'/\Re)} = -\rho.\omega^2.\vec{e}_\rho$
Question 4 : $\vec{a}_c = 2.\omega.\frac{d\rho}{dt}.\vec{e}_\theta$
Question 5 : $N.\sin\alpha + m.\rho.\omega^2 = m.\ddot{\rho}\,;\ F - 2.m.\omega.\dot{\rho} = 0$ et $-m.g + N.\cos\alpha = m.\ddot{z}$
Question 6 : $\vec{OM} = \rho.\vec{e}_\rho + z.\vec{e}_z = \rho_0.\cosh(\omega.t).\vec{e}_\rho$
Question 7 : $F = 1.18\ N$

Exercice 7

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : ...
Question 4 : $m.g.\cos\theta - N + m.\rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$ et $m.g.\sin\theta + m.\rho.\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$
Question 5 : $v = \sqrt{2.\rho.g.\left(\cos\theta - 1\right) + v_0^2}$

Question 6 : $N = \frac{m.v_0^2}{\rho} + m.g.(3.\cos\theta - 2)$
Question 7 : $h = \frac{5}{2}.\rho$

Exercice 8

Question 1 : $\theta_{(t)} = 2.\pi - \frac{g.h.t^2}{2(a^2+h^2)}$
Question 2 : $t = 2.\frac{\sqrt{\pi(a^2+h^2)}}{g.h}$

Exercice 9

Question 1 : ...
Question 2 : ...
Question 3 : Terre : $v_{lib(r=0)} = 11.2km.s^{-1}$ et $v_{lib(r=300km)} = 10.9km.s^{-1}$
Question 4 : Lune : $v_{lib(r=0)} = 2.4km.s^{-1}$

Exercice 10

Question 1 : ...
Question 2 : $v'2 = 4\ m/s$
Question 3 : oui
Question 4 : continuer dans le même sens

Exercice 11

Question 1 : $z^{max} = \frac{2}{g}\left[\frac{m_1.v_{(1,i)}}{(m_1+m_2)}\right]^2$
Question 2 : $z^{max} = \frac{1}{2g}\left[\frac{m_1.v_{(1,i)}}{(m_1+m_2)}\right]^2$
Question 3 : ...